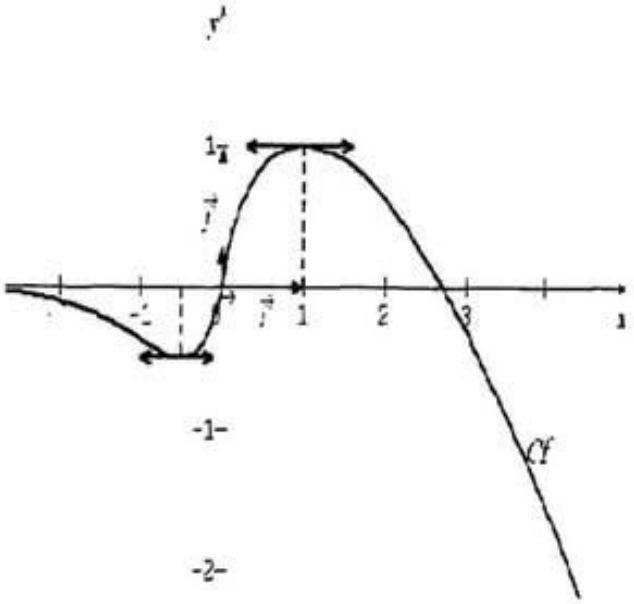

Pour $x>0$: $f(x)=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0$

$\Leftrightarrow x=e$

Exercice 16

$f(x)=\sqrt{1-e^{2x}}$

1) $1-e^{2x}\geq 0 \Leftrightarrow 1\geq e^{2x} \Leftrightarrow 0\geq 2x \Leftrightarrow x\leq 0$

Donc $D_f = D =]-\infty, 0]$

$x\in]-\infty,0[$ On a : $-x\geq 0$ et

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{x}=-\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{-x}$$

$$=-\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{\sqrt{x^2}}\left(\sqrt{x^2}=|x|=-x; x\leq 0\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{\sqrt{-x}\sqrt{-x}}=\frac{-1}{\sqrt{-x}}\sqrt{\frac{1-e^{2x}}{-x}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{-x}}\sqrt{\frac{e^{2x}-1}{x}}=\frac{-1}{\sqrt{-x}}\sqrt{\frac{2(e^{2x}-1)}{2x}}$$

Donc : $x\in]-\infty,0[= D-\{0\}$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{-1}{\sqrt{-x}}\sqrt{2\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)}$$

ou bien :

$x\in \mathbb{R}^*_- = D-\{0\}$

$$-\frac{1}{\sqrt{-x}}\sqrt{2\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{-x}}\sqrt{\frac{e^{2x}-1}{x}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{-x}}\sqrt{\frac{1-e^{2x}}{-x}}=-\frac{1}{\sqrt{-x}}.\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{\sqrt{-x}}$$

$$=-1\times\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{\sqrt{(-x)^2}}=-\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{|x|}$$

$$=-\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{-x}=\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{x}=\frac{f(x)}{x}$$

2) on a :

on pose $t=2x$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{2x}=\lim_{t\to 0^-}\frac{e^t-1}{t}=1$$

Donc : $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{-x}}.\sqrt{2\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)}$

$$=\frac{-1}{0^+}.\sqrt{2}=-\infty$$

f Non dérivable a gauche en 0 et par la suite C_f admet une demi-tangente Verticale érigé vers le haut (ordonné positif) au point d'abscisse0

3) $f'(x)=\frac{(1-e^{2x})'}{2\sqrt{1-e^{2x}}}=\frac{-2e^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}$, $x<0$

$$=-\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\leq 0.$$